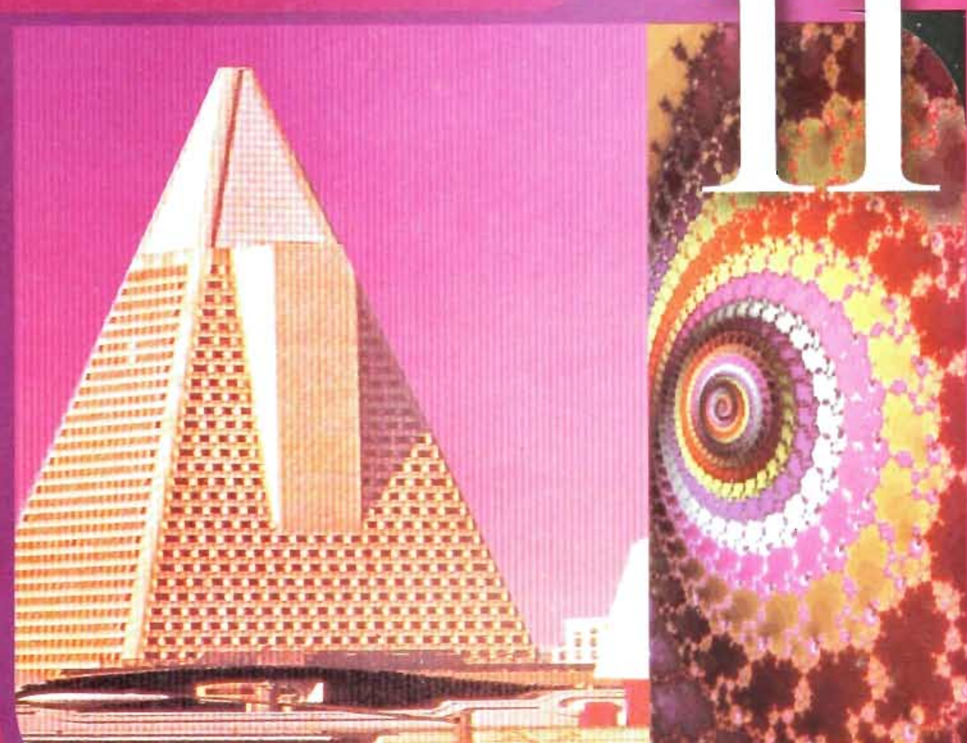
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

11



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRẦN VĂN HẠO (Tổng Chủ biên) - VŨ TUẤN (Chủ biên)
ĐÀO NGỌC NAM - LÊ VĂN TIẾN - VŨ VIẾT YÊN

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

(Tái bản lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

KÍ HIỆU DÙNG TRONG SÁCH

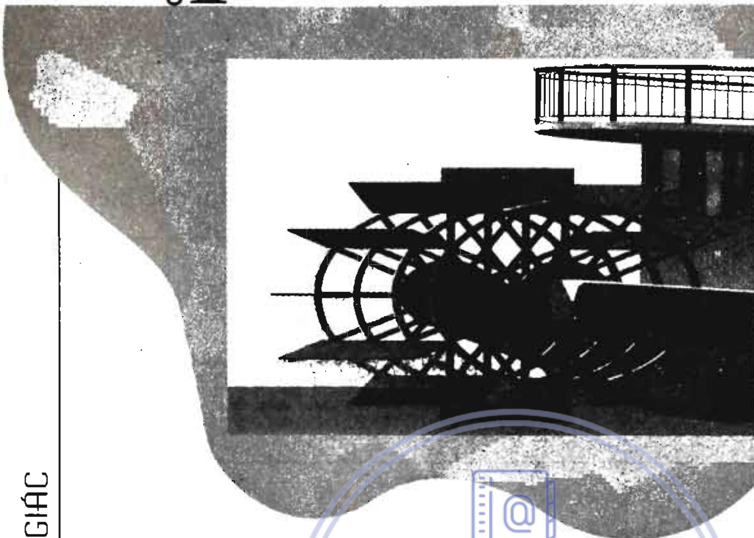
Phần hoạt động của học sinh.

Tuỳ đối tượng cụ thể mà giáo viên sử dụng.

■ **Kết thúc chứng minh hoặc lời giải.**

01 – 2010/CXB/566 – 1485/GD Mã số : CH101T0

Chương I HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



Tiếp tục phần *giá trị lượng giác* và *các công thức lượng giác* được học trong chương cuối của Đại số 10, chương này cung cấp kiến thức về *hàm số lượng giác* và cách giải *phương trình lượng giác* . Ở đây chỉ yêu cầu giải thành thạo các phương trình cơ bản và những phương trình bậc nhất và bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

Khác với những hàm số đã được học trước đây, các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là những hàm số tuần hoàn. Các hàm số này gặp nhiều trong các môn khoa học ứng dụng (Vật lí, Hoá học, ...)

§1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I – ĐỊNH NGHĨA

Trước hết, ta nhắc lại bảng các giá trị lượng giác của các cung đặc biệt.

Cung / Giá trị lượng giác	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$
$\cot x$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1

a) Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy tính $\sin x$, $\cos x$ với x là các số sau :

$$\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ;\ 1{,}5\ ;\ 2\ ;\ 3{,}1\ ;\ 4{,}25\ ;\ 5.$$

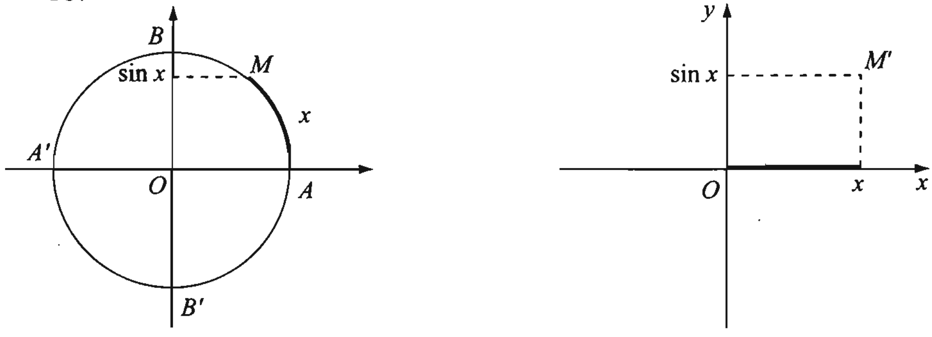
b) Trên đường tròn lượng giác, với điểm gốc A, hãy xác định các điểm M mà số đo của cung $\overset{\frown}{AM}$ bằng x (rad) tương ứng đã cho ở trên và xác định $\sin x$, $\cos x$ (lấy $\pi \approx 3{,}14$).

1. Hàm số sin và hàm số côsin

a) Hàm số sin

Ở lớp 10 ta đã biết, có thể đặt tương ứng mỗi số thực x với một điểm M duy nhất trên đường tròn lượng giác mà số đo của cung $\overset{\frown}{AM}$ bằng x (rad) (h.1a). Điểm M có tung độ hoàn toàn xác định, đó chính là giá trị $\sin x$.

Biểu diễn giá trị của x trên trục hoành và giá trị của $\sin x$ trên trục tung, ta được Hình 1b.



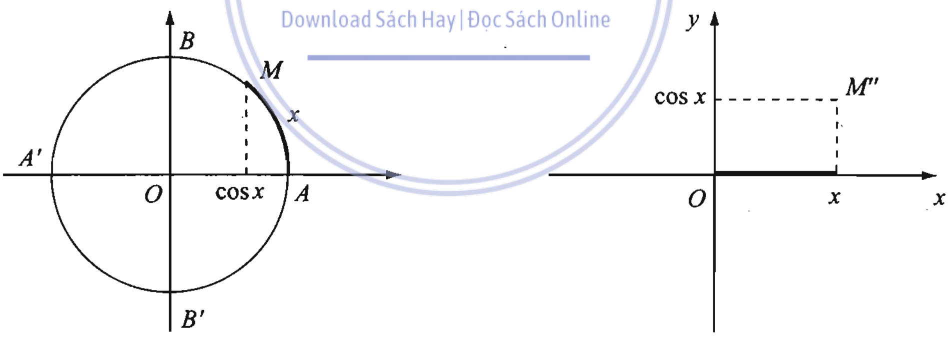
a) b)

Hình 1

> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$
>
> $$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
> $$x \mapsto y = \sin x$$
>
> được gọi là ***hàm số sin***, kí hiệu là $y = \sin x$.

Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số côsin



a) b)

Hình 2

> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$
>
> $$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
> $$x \mapsto y = \cos x$$
>
> được gọi là ***hàm số côsin***, kí hiệu là $y = \cos x$ (h.2).

Tập xác định của hàm số côsin là $\mathbb{R}$.

2. Hàm số tang và hàm số côtang

a) Hàm số tang

Hàm số ***tang*** là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad (\cos x \neq 0),$$

kí hiệu là $y = \tan x$.

Vì $\cos x \neq 0$ khi và chỉ khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ nên tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Hàm số côtang

Hàm số ***côtang*** là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (\sin x \neq 0),$$

kí hiệu là $y = \cot x$.

Vì $\sin x \neq 0$ khi và chỉ khi $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ nên tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2

Hãy so sánh các giá trị $\sin x$ và $\sin(-x)$, $\cos x$ và $\cos(-x)$.

NHẬN XÉT

Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, từ đó suy ra các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ đều là những hàm số lẻ.

II – TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

3

Tìm những số T sao cho $f(x+T) = f(x)$ với mọi x thuộc tập xác định của các hàm số sau :

a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \tan x$.

Người ta chứng minh được rằng $T = 2\pi$ là số dương nhỏ nhất thoả mãn đẳng thức

$$\sin(x + T) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (xem } \textit{Bài đọc thêm}\text{).}$$

Hàm số $y = \sin x$ thoả mãn đẳng thức trên được gọi là ***hàm số tuần hoàn*** với ***chu kì*** 2π.

Tương tự, hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ cũng là những hàm số tuần hoàn, với chu kì π.

III – SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Hàm số $y = \sin x$

Từ định nghĩa ta thấy hàm số $y = \sin x$:

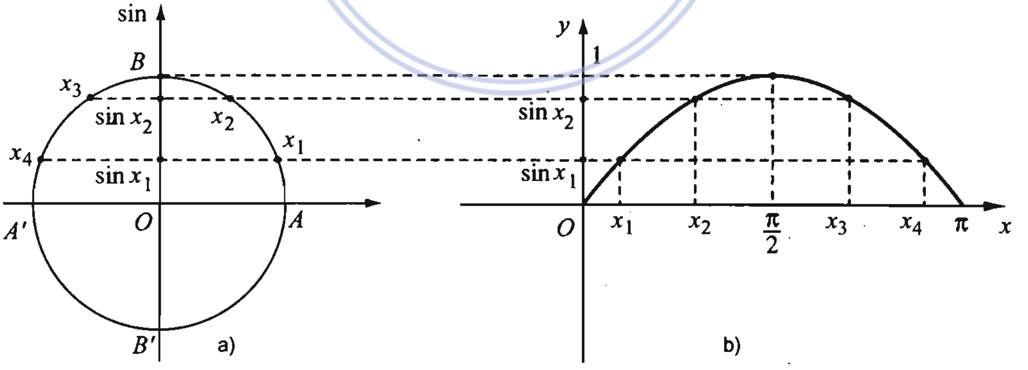
- Xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- Là hàm số lẻ ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π.

Sau đây, ta sẽ khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = \sin x$.

a) Sự biến thiên và đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$

Xét các số thực x_1, x_2, trong đó $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Đặt $x_3 = \pi - x_2$, $x_4 = \pi - x_1$.

Biểu diễn chúng trên đường tròn lượng giác và xét $\sin x_i$ tương ứng ($i = 1, 2, 3, 4$) (h.3a).



Hình 3

Trên Hình 3 ta thấy, với x_1, x_2 tuỳ ý thuộc đoạn $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ và $x_1 < x_2$ thì $\sin x_1 < \sin x_2$.

Khi đó x_3, x_4 thuộc đoạn $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ và $x_3 < x_4$ nhưng $\sin x_3 > \sin x_4$.

Vậy hàm số $y = \sin x$ *đồng biến* trên $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ và *nghịch biến* trên $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.

Bảng biến thiên :

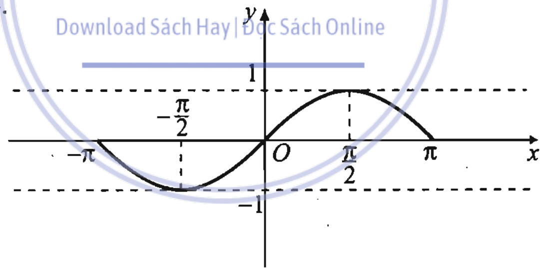
x	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$y = \sin x$	0 ↗	1	↘ 0

Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0\,;\,\pi]$ đi qua các điểm $(0\,;\,0)$, $(x_1\,;\,\sin x_1)$, $(x_2\,;\,\sin x_2)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}\,;\,1\right)$, $(x_3\,;\,\sin x_3)$, $(x_4\,;\,\sin x_4)$, $(\pi\,;\,0)$ (h.3b).

CHÚ Ý

Vì $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên lấy đối xứng đồ thị hàm số trên đoạn $[0\,;\,\pi]$ qua gốc toạ độ O, ta được đồ thị hàm số trên đoạn $[-\pi\,;\,0]$.

Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi\,;\,\pi]$ được biểu diễn trên Hình 4.



Hình 4

b) Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$

Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π nên với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\sin(x + k2\pi) = \sin x,\quad k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó, muốn có đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên toàn bộ tập xác định $\mathbb{R}$, ta tịnh tiến liên tiếp đồ thị hàm số trên đoạn $[-\pi\,;\,\pi]$ theo các vectơ $\vec{v} = (2\pi\,;\,0)$ và $-\vec{v} = (-2\pi\,;\,0)$, nghĩa là tịnh tiến song song với trục hoành từng đoạn có độ dài 2π.